

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



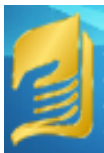
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A IX-A

1. Un fermier și-a propus la începutul anului 2014 să obțină câte x tone de grâu de pe fiecare hectar cultivat. La sfârșitul anului a constatat că:
 - pe 50 % din suprafața cultivată, producția a depășit-o pe cea planificată cu 10%;
 - pe 30 % din suprafața cultivată, producția a depășit-o pe cea planificată cu 20%;
 - pe 20 % din suprafața cultivată, producția a fost cu 25% mai mică decât cea prognozată.Exprimați, în funcție de x , cantitatea medie de grâu obținută de fermier de pe fiecare hectar.
2. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$, considerăm bisectoarea BE , unde $E \in AC$ și punctul $D \in (BC)$ astfel încât $BC = 3 \cdot BD$. Dacă $\{O\} = BE \cap AD$ și F este mijlocul segmentului AB , demonstrați că punctele F , O și C sunt coliniare.
3. Suma pătratelor a 18 numere naturale nenule este 2015.
 - a) Arătați că cel puțin două dintre aceste numere sunt egale.
 - b) Găsiți 18 numere naturale nenule având suma pătratelor egală cu 2015.
4. Să se rezolve ecuația $m \cdot |x-1| = 2015 \cdot x - 1$, unde m este un parametru real. Discuție după valorile parametrului real m .

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



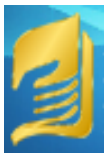
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A X-A

- Se consideră numerele complexe u și v , de modul 1, astfel încât $|u+v| = |u-v| = a$ și punctele O , A , B și C în planul complex, de afixe 0 , u , v respectiv $u+v$.
 - Demonstrați că punctele O , A , B și C sunt vârfurile unui pătrat.
 - Determinați valoarea numărului real a .
- Se dă funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ astfel încât $f(1) = a$ și
$$\frac{1}{2 \cdot f(1)} + \frac{1}{3 \cdot f(2)} + \frac{1}{4 \cdot f(3)} + \dots + \frac{1}{n \cdot f(n-1)} = \frac{n-1}{f(n)}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$
 - Calculați $f(2)$, $f(3)$ și $f(4)$ în funcție de a .
 - Demonstrați că $f(n) = n \cdot a, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - Pentru ce valori $a \in \mathbb{N}^*$, funcția este surjectivă.
- Se dă progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu rația q și astfel încât $b_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - Calculați $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \lg b_k$, funcție de n , b_1 și q .
 - Demonstrați că $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \lg b_k \leq \lg \left(\frac{b_1 + b_n}{2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 - Pentru ce valoare a lui q are loc egalitatea din b) ?
- Cvadrupla de numere reale (a, b, c, d) trece, în prima etapă în cvadrupla $(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$ și apoi procedeul continuă după aceeași regulă cu noua cvadruplă. Găsiți cvadruplele în următoarele cazuri:
 - După patru etape, plecând de la cvadrupla $(8, 17, 3, 107)$.
 - După șapte etape, plecând de la cvadrupla $(5, 7, 11, 19)$.
 - După patru etape, plecând de la cvadrupla $(n, n, 1-4n, n), n \in \mathbb{N}^*$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XI-A

1. Determinați asimptotele spre $-\infty$ și spre $+\infty$ ale graficului funcției

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

2. Se consideră $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \ln \left(\left(1 + \frac{\sin x}{2}\right) \left(1 + \frac{\sin 2x}{2}\right) \left(1 + \frac{\sin 3x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\sin nx}{2}\right) \right), n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{și } L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{x}.$$

- a) Calculați L_1 . b) Demonstrați că $L_n = \frac{n(n+1)}{4}$. c) Demonstrați că există limita $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_6(x)}{x}$.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & h_a h_b \\ 1 & b & h_b h_c \\ 1 & c & h_c h_a \end{pmatrix}$, unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi

ABC de arie S , iar h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor triunghiului. Demonstrați că $\det A \geq 0$. În ce condiții avem $\det A = 0$?

4. Se consideră tabloul alăturat, format din 9 celule completate inițial cu numărul 1. La fiecare pas, alegem la întâmplare un pătrat format din 4 celule și mărim cu 2 fiecare număr din celulele pătratului ales. De exemplu, primii trei pași ar putea fi următorii:

1	1	1
1	1	1
1	1	1

	P₁	P₂	P₃																																				
<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1	1	1	1	1	1	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	3	3	1	3	3	1	1	1	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	1	3	3	3	5	3	3	3	1	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>3</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	3	5	3	5	7	3	3	3	1
1	1	1																																					
1	1	1																																					
1	1	1																																					
1	3	3																																					
1	3	3																																					
1	1	1																																					
1	3	3																																					
3	5	3																																					
3	3	1																																					
3	5	3																																					
5	7	3																																					
3	3	1																																					

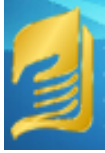
- a) Demonstrați că, în orice moment, determinantul matricei asociate tabloului este un număr întreg divizibil cu 4.

b) Arătați că suma tuturor elementelor din tablou nu poate fi niciodată egală cu 2015.

c) Determinați numerele naturale n, A și B , dacă la pasul n tabloul arată ca în figura alăturată.

	P_n	
401	1201	A
p	2015	r
701	q	B

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XII-A

1. Viteza unui mobil la momentul t este dată de legea $v = 15 - 3t$, unde viteza v este exprimată în metri pe secundă iar timpul t este exprimat în secunde, raportat la momentul inițial $t_0 = 0$. Calculați distanța pe care o parcurge mobilul din momentul inițial și până în momentul opririi.

Notă. Admitem cunoscut faptul că distanța parcursă de un mobil aflat în mișcare rectilinie, cu viteza $v(t)$, în intervalul de timp $[a, b]$, este $x = \int_a^b v(t) dt$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$$x \circ y = 5xy - 5x - 5y + 6, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați numerele reale egale cu simetricile lor în raport cu legea " \circ ".

b) Calculați $A = \frac{1}{5} \circ \frac{2}{5} \circ \frac{3}{5} \circ \dots \circ \frac{2015}{5}$.

3. Se consideră mulțimea

$$M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{există } n \in \mathbb{N}^* \text{ pentru care } X^n = O_2\}.$$

a) Dacă $X \in M$, arătați că $X^2 = O_2$.

b) Dacă $A, B \in M$ și $AB = BA$, demonstrați că $AB \in M$ și $A + B \in M$.

c) Arătați că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca sumă finită de matrice din M .

4. Calculați $\int \frac{\sin x + \cos x}{e^x + a \cos x} dx$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $a > 0$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.