INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A IX-A

1. Un fermier şi-a propus la începutul anului 2014 să obțină câte x tone de grâu de pe fiecare hectar cultivat. La sfârşitul anului a constatat că:

- pe 50 % din suprafața cultivată, producția a depăşit-o pe cea planificată cu 10%;
- pe 30 % din suprafața cultivată, producția a depăşit-o pe cea planificată cu 20%;
- pe 20 % din suprafața cultivată, producția a fost cu 25% mai mică decât cea prognozată.

Exprimați, în funcție de x, cantitatea medie de grâu obținută de fermier de pe fiecare hectar.

2. În triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ şi $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$, considerăm bisectoarea BE, unde $E \in AC$ şi punctul $D \in (BC)$ astfel încât $BC = 3 \cdot BD$. Dacă $\{O\} = BE \cap AD$ şi F este mijlocul segmentului AB, demonstrați că punctele F, O şi C sunt coliniare.

3. Suma pătratelor a 18 numere naturale nenule este 2015.
a) Arătați că cel puțin două dintre aceste numere sunt egale.
b) Găsiți 18 numere naturale nenule având suma pătratelor egală cu 2015.

4. Să se rezolve ecuația $m \cdot |x-1| = 2015 \cdot x - 1$, unde m este un parametru real. Discuție după valorile parametrului real m.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A X-A

1. Se consideră numerele complexe u şi v, de modul 1, astfel încât $|u+v|=|u-v|=a$ şi punctele O, A, B şi C în planul complex, de afixe 0, u, v respectiv $u+v$.

a) Demonstraţi că punctele O, A, B şi C sunt vârfurile unui pătrat.

b) Determinaţi valoarea numărului real a.

2. Se dă funcţia $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ astfel încât $f(1)=a$ şi

$$\frac{1}{2\cdot f(1)}+\frac{1}{3\cdot f(2)}+\frac{1}{4\cdot f(3)}+\ldots+\frac{1}{n\cdot f(n-1)}=\frac{n-1}{f(n)},\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$$

a) Calculaţi $f(2)$, $f(3)$ şi $f(4)$ în funcţie de a.

b) Demonstraţi că $f(n)=n\cdot a, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) Pentru ce valori $a\in\mathbb{N}^*$, funcţia este surjectivă.

3. Se dă progresia geoemtrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu raţia q şi astfel încât $b_n\geq 1, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi $\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\lg b_k$, funcţie de n, b_1 şi q.

b) Demonstraţi că $\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\lg b_k\leq\lg\left(\frac{b_1+b_n}{2}\right), \forall n\in\mathbb{N}^*$-

c) Pentru ce valoare a lui q are loc egalitatea din b) ?

4. Cvadrupla de numere reale (a,b,c,d) trece, în prima etapă în cvadrupla $(|a-b|,|b-c|,|c-d|,|d-a|)$ şi apoi procedeul continuă după aceeaşi regulă cu noua cvadruplă.

Găsiţi cvadruplele în următoarele cazuri:

1°. După patru etape, plecând de la cvadrupla (8, 17, 3, 107).

2°. După şapte etape, plecând de la cvadrupla (5, 7, 11, 19).

3°. După patru etape, plecând de la cvadrupla $(n,n,1-4n,n), n\in\mathbb{N}^*$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiințele naturii

CLASA A XI-A

1. Determinați asimptotele spre $-\infty$ şi spre $+\infty$ ale graficului funcției

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}.$$

2. Se consideră $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=\ln\left(\left(1+\frac{\sin x}{2}\right)\left(1+\frac{\sin 2x}{2}\right)\left(1+\frac{\sin 3x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\sin nx}{2}\right)\right), n\in\mathbb{N}^*$

şi $L_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_n(x)}{x}$.

a) Calculați L_1. b) Demonstrați că $L_n=\frac{n(n+1)}{4}$. c) Demonstrați că există limita $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_6(x)}{x}$.

3. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & a & h_a h_b\\ 1 & b & h_b h_c\\ 1 & c & h_c h_a\end{pmatrix}$, unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi ABC de arie S, iar h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor triunghiului. Demonstrați că $\det A\geq 0$. În ce condiții avem $\det A=0$?

4. Se consideră tabloul alăturat, format din 9 celule completate inițial cu numărul 1. La fiecare pas, alegem la întâmplare un pătrat format din 4 celule şi mărim cu 2 fiecare număr din celulele pătratului ales. De exemplu, primii trei paşi ar putea fi următorii:

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	1	1
1	1	1
1	1	1

P₁

1	3	3
1	3	3
1	1	1

P₂

1	3	3
3	5	3
3	3	1

P₃

3	5	3
5	7	3
3	3	1

a) Demonstrați că, în orice moment, determinantul matricei asociate tabloului este un număr întreg divizibil cu 4.
b) Arătați că suma tuturor elementelor din tablou nu poate fi niciodată egală cu 2015.
c) Determinați numerele naturale *n*, *A* şi *B*, dacă la pasul *n* tabloul arată ca în figura alăturată.

P_n

401	1201	***A***
p	2015	*r*
701	*q*	***B***

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil real, specializarea ştiinţele naturii

CLASA A XII-A

1. Viteza unui mobil la momentul t este dată de legea $v = 15 - 3t$, unde viteza v este exprimată în metri pe secundă iar timpul t este exprimat în secunde, raportat la momentul iniţial $t_0 = 0$. Calculaţi distanţa pe care o parcurge mobilul din momentul iniţial şi până în momentul opririi.

Notă. Admitem cunoscut faptul că distanţa parcursă de un mobil aflat în mişcare rectilinie, cu viteza $v(t)$, în intervalul de timp $[a, b]$, este $x = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă

$$x \circ y = 5xy - 5x - 5y + 6, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determinaţi numerele reale egale cu simetricele lor în raport cu legea "$\circ$" .

b) Calculaţi $A = \frac{1}{5} \circ \frac{2}{5} \circ \frac{3}{5} \circ \ldots \circ \frac{2015}{5}$.

3. Se consideră mulţimea

$$\mathrm{M} = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \text{există } n \in \mathbb{N}^* \text{ pentru care } X^n = O_2 \right\}.$$

a) Dacă $X \in \mathrm{M}$, arătaţi că $X^2 = O_2$.

b) Dacă $A, B \in \mathrm{M}$ şi $AB = BA$, demonstraţi că $AB \in \mathrm{M}$ şi $A + B \in \mathrm{M}$.

c) Arătaţi că matricea I_2 nu poate fi scrisă ca sumă finită de matrice din M.

4. Calculaţi $\int \frac{\sin x + \cos x}{e^x + a\cos x}\mathrm{d}x$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $a > 0$.

Notă. Timp de lucru: 4 ore. Fiecare problemă este notată cu punctaje de la 0 la 7.